Fiche de calcul sur les racines carrées

Règles

Soient a et b deux réels positifs et c un réel.

1. Produit et quotient :

$$\boxed{\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b} \text{ et } \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$$

   Attention il faut que a et b soient positifs !

2. Racine carrée d'un carré et carré d'une racine carrée

$$\boxed{\sqrt{c^2}=|c| \text{ et } \left(\sqrt{a}\right)^2=a}$$

   La deuxième égalité est très utile :
   - Dans le cas d'une expression du type : $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ permettant de la transformer en $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
   - Pour simplifier dans l'autre sens : $\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (utile dans le calcul de limite par exemple)

3. Multiplication par la forme conjuguée pour enlever des racines carrées. Les formes et leur conjuguée :

$$\sqrt{X}-\sqrt{Y} \longleftrightarrow \sqrt{X}+\sqrt{Y}$$

$$X-\sqrt{Y} \longleftrightarrow X+\sqrt{Y}$$

$$\sqrt{X}-Y \longleftrightarrow \sqrt{X}+Y$$

   On multiplie numérateur et dénominateur par la (même) forme conjuguée : on fait apparaître une identité remarquable (au numérateur ou au dénominateur)

4. **Somme : Il n'existe aucune règle de calculs sur la racine carrée d'une somme ou de la somme de racines carrées**

Exemples

1. Produit et quotient :
   - $\sqrt{35}=\sqrt{7}\sqrt{5}$ et $\sqrt{8}=\sqrt{4}\sqrt{2}=2\sqrt{2}$
   - $\sqrt{\dfrac{9}{5}}=\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

2. Carré :
   - $\sqrt{(-2)^2}=2$ et $\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|$.
   - $\sqrt{3}^2=3$ et $\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)^2=\dfrac{3}{5}$.

3. Conjuguée : $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$

Conseils :

- On préférera en général donner le résultat $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ plutôt que $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
- Faire très attention : **Somme et racine carrée ne fonctionne pas bien ensemble**.
  Par exemple on ne peut absolument pas simplifier $\sqrt{a^2+b^2}$ ou $\sqrt{1-x^2}$.
- Pour montrer l'égalité entre deux nombres positifs, on peut montrer que leurs carrés sont égaux.
- Rappel : attention dans le cas d'équation et d'inéquation :

Si f est strictement monotone sur I et $(a,b)\in I^2$ $a=b \Leftrightarrow f(a)=f(b)$

Si f est strictement croissante sur I et $(a,b)\in I^2$ $a\leq b \Leftrightarrow f(a)\leq f(b)$ Si f est strictement décroissante sur I et $(a,b)\in I^2$ $a\leq b \Leftrightarrow f(a)\geq f(b)$

(Fonctionne aussi avec des inégalités strictes)

On ne peut passer au carré sur des inégalités ou des égalités (en raisonnant par équivalence) **que si les expressions**, de chaque côté, **sont** toutes les deux **de mêmes signes** :

En effet la fonction carré n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

Voici des exercices de calculs. Il faut en faire très régulièrement (5 à 10 minutes par jour) afin de progresser. <u>Si vous êtes à l'aise</u> n'hésitez pas à faire le plus de calcul possible de tête

Exercice 1:

Simplifier (sans racine au dénominateur pour les fractions) (peut se faire en calcul mental)

(a) $\sqrt{50}$

(b) $\sqrt{32}$

(c) $\sqrt{48}$

(d) $\sqrt{\dfrac{9}{10}\dfrac{\sqrt{40}}{\sqrt{81}}}$.

(e) $2\sqrt{\dfrac{2}{27}} \times \sqrt{\dfrac{3}{8}} \times \dfrac{4\sqrt{10}}{\sqrt{50}}$

(f) $\dfrac{3\sqrt{2} \times \sqrt{8} \times 2\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{35}{56}}}$.

Exercice 2:

Ecrire les expressions sous la forme $a\sqrt{b}$ (si possible) ou $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$

(a) $\sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$

(b) $2\sqrt{12} - 4\sqrt{75} + 3\sqrt{27}$

(c) $5\sqrt{3} - 5\sqrt{28} - \sqrt{7}$

Exercice 3:

Simplifier (sans racine au dénominateur pour les fractions)

(a) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$

(b) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)^2$

(c) $\left(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}\right)^2$

(d) $\dfrac{8}{3\sqrt{6}}$

(e) $\dfrac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

(f) $\dfrac{5}{\sqrt{3} + 2}$

(g) $\sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{\dfrac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}}$

Exercice 4:

Simplifier :

(a) $\sqrt{(x+3)^2 - (x-3)^2}$

(b) $\sqrt{(x+2)^2 + (x-2)^2}$

(c) $\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}\right)^2$

(d) $\dfrac{x}{\sqrt{x}}$

(e) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$.

(f) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^5}}$.

(g) $\dfrac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

(h) $\dfrac{a + \sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}}$

(i) $\dfrac{a + 4\sqrt{a} + 4}{\sqrt{a} + 2}$

(j) $\dfrac{x^3 - 1}{x\sqrt{x} - 1}$

Exercice 5:

Comparer les deux nombres :

(a) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ et $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$.

(b) $14 - 6\sqrt{5}$ et $3 - \sqrt{5}$

(c) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ et 2.

(d) $\sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} + \sqrt{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}$ et $\sqrt{2\sqrt{n} + 2}$.

Exercice 6:

Ecrire sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec a et b des fractions :

(a) $1 - \dfrac{3}{4 - \frac{2}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}}$.

(b) $1 + \dfrac{1}{3 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}+1}}}$

Exercice 7:

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

(a) $\sqrt{2x+3} = x - 5$.

(b) $x - 2 \leq \sqrt{x-1}$

(c) $-x + 1 > \sqrt{x^2 - 2x - 3}$