# Fiche de calcul - Primitives

**Trouver une primitive de $f$ consiste en trouver une fonction $g$ tel que $g' = f$**
**Il suffit donc bien souvent de connaître ses dérivées usuelles et ses règles de calcul sur les dérivées pour déterminer des primitives : déterminer une primitive c'est faire le calcul/ le raisonnement inverse de la dérivation**

## Primitives usuelles :

| **Fonction $f$** | **Domaine de définition** | **Une primitive $F$** |
|---|---|---|
| $f(x) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$ | $\mathbb{R}$ | $F(x) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}\, x$ |
| $f(x) = x^n \ (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$ | $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n \leq -2$ | $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ | $F(x) = \ln(\lvert x\rvert)$ |
| $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $F(x) = \sqrt{x}$ |
| $f(x) = e^x$ | $\mathbb{R}$ | $F(x) = e^x$ |
| $f(x) = \cos(x)$ | $\mathbb{R}$ | $F(x) = \sin(x)$ |
| $f(x) = \sin(x)$ | $\mathbb{R}$ | $F(x) = -\cos(x)$ |
| $f(x) = \ln(x)$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $F(x) = x\ln(x) - x$ |

## Règles de calculs :

| **Forme de la fonction** | **Une primitive** | **Condition** |
|---|---|---|
| $u + v$ | $U + V$ | aucune |
| $\lambda u$ | $\lambda U$ | aucune |

**Conséquences de la formule de dérivée d'une composée :**

| **Forme de la fonction** | **Une primitive** | **Condition** |
|---|---|---|
| $u' \times e^u$ | $e^u$ | aucune |
| $\frac{u'}{u}$ | $\ln(\lvert u\rvert)$ | pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) \neq 0$ |
| $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $\sqrt{u}$ | pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) > 0$ |
| $u' \times u^n \ (n \in \mathbb{N})$ | $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ | aucune |
| $u' \times u^n$ (avec $n < -1$) | $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ | pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) \neq 0$ |
| $u' \times \cos(u)$ | $\sin(u)$ | aucune |
| $u' \times \sin(u)$ | $-\cos(u)$ | aucune |

**Conseil pour primitiver**

- **Quand la primitive n'est pas trop compliquée, toujours la dériver pour vérifier** qu'on obtient la fonction dont on cherche la primitive (donnée dans l'énoncé donc).
- Primitiver une somme : primitiver chacun des termes et sommer.
- Quand je veux primitiver : est-ce une primitive usuelle ? est-ce une primitive de type composée ?
  **Exemple :** $x \mapsto \sin(5x)e^{\cos(5x)}$
  On remarque une exponentielle. La fonction semble être sous une forme proche de $u'e^u$ avec $u(x) = \cos(5x)$ puisque la dérivée de la fonction cos est la fonction $-\sin$.
  **Méthode 1 :** on cherche donc la primitive sous la forme $x \mapsto \lambda e^{\cos(5x)}$. On dérive et on trouve $x \mapsto -5\lambda\sin(5x)e^{\cos(5x)}$. Comme on veut trouver $x \mapsto \sin(5x)e^{\cos(5x)}$, on prend $-5\lambda = 1$ donc $\lambda = -\dfrac{1}{5}$ et une primitive du premier terme est donc $x \mapsto -\dfrac{1}{5}e^{\cos(5x)}$.
  **Méthode 2 :** On fait apparaitre $u'e^u$ dans l'expression de la fonction à primitiver : $\sin(5x)e^{\cos(5x)} = -\dfrac{1}{5} \times \underbrace{-5\sin(5x)}_{u'(x)}\underbrace{e^{\cos(5x)}}_{e^{u(x)}}$.
  Une primitive est donc $x \mapsto -\dfrac{1}{5}e^{\cos(5x)}$.
- **On fait très attention : il n'y a pas de primitive général de $uv$ ou de $\dfrac{u}{v}$.** Il faudra soit reconnaître l'expression d'une dérivée de type composée, soit pour le produit utiliser les méthodes d'intégration par parties.

**Formule d'intégration par parties :** Soient $u$ et $v$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. Alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

**Voici des exercices de calculs. <u>Si vous êtes à l'aise</u> n'hésitez pas à faire le plus de calcul possible de tête.**

**Exercice 1:**

De quelle fonction, les fonctions suivantes sont-elles les primitives ? (on ne s'intéressera pas à l'intervalle sur lesquelles ces primitives sont valides)

(a) $x \mapsto (x^2 - 2x + 1)e^x - \dfrac{1}{x} + 2$  (b) $x \mapsto \sqrt{x^2 + 5x + 2} + 4$  (c) $x \mapsto (x+1)\ln(x^2 - 1) - 47$

**Exercice 2:**

Déterminer quand c'est possible une primitive (on donnera un intervalle de validité) de

(a) $x \mapsto 1 - x + x^5 + 3x^7$

(b) $x \mapsto x + \dfrac{1}{x^6} - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

(c) $x \mapsto 2x + 3x^6 + \dfrac{1}{x}$

(d) $x \mapsto (x-1)(x+3)$

(e) $x \mapsto \dfrac{-4}{3x^2}$

(f) $x \mapsto \sin(x) - 2\cos(x) + 5x$

(g) $x \mapsto \dfrac{3x+2}{x}$

(h) $x \mapsto x\sqrt{x}$

**Exercice 3:**

Déterminer les réels $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$, la fonction $f$ pour que la dérivée de la fonction $h$ soit égale à $g$ (donc pour que $h' = g$). Pour (f) et (g), on vous aide un peu moins que pour les précédents. (On ne donnera pas d'intervalle de validité)

(a) $h : x \mapsto \alpha \ln(f)$ et $g : x \mapsto \dfrac{2}{1+3x}$

(b) $h : x \mapsto \alpha x^5 + \beta x^\gamma$ et $g : x \mapsto \dfrac{2}{3}x^4 + 5x^{11}$

(c) $h : x \mapsto \dfrac{\alpha}{f}$ et $g : x \mapsto \dfrac{4}{(3x+5)^2}$

(d) $h : x \mapsto \alpha \ln(f)$ et $g : x \mapsto \dfrac{6x+3}{x^2 + x - 3}$

(e) $h : x \mapsto \alpha \cos(f)$ et $g : x \mapsto \dfrac{\sin(\ln(x))}{x}$

(f) $h : x \mapsto \alpha f$ et $g : x \mapsto \dfrac{3e^x + 3}{(e^x + x)^5}$

(g) $h : x \mapsto \alpha f$ et $g : x \mapsto \dfrac{9x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

**Exercice 4:**

Déterminer si possible une primitive de (On ne donnera pas d'intervalle de validité)

(a) $x \mapsto -2xe^{3x^2+2}$

(b) $x \mapsto \dfrac{4x^3 + x}{2x^4 + x^2}$

(c) $x \mapsto 6x^2 e^{3x^2}$.

(d) $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{2 - 3\sin(x)}}$

(e) $x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln(x))^2}$

(f) $x \mapsto \dfrac{4x - 10}{x^2 - 5x + 6}$

(g) $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{(\cos(x))^5}$

(h) $x \mapsto (3x+1)\cos(x^2)$

(i) $x \mapsto \dfrac{\sin(x) + 1}{\cos^2(x)}$

(j) $x \mapsto \sin(x)\cos(x)$

(k) $x \mapsto (2x+7)^6$

(l) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}} + \dfrac{1}{x}$

(m) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^4$

(n) $x \mapsto \dfrac{5x}{\sqrt{3x^2+1}} - \cos(x)$

(o) $x \mapsto \dfrac{5e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} + \dfrac{7}{x^2}$

(p) $x \mapsto (3x^2 + 3)(5x^3 + 15x)^7$

(q) $x \mapsto \dfrac{-15x^4 + 3\sin(x)}{\cos(x) + x^5}$

(r) $x \mapsto \dfrac{4\sin(x) - 2\tan^2(x)}{(\tan(x) - x + 2\cos(x))^3}$

**Exercice 5:**

A l'aide d'une intégration par parties déterminer la primitive des fonctions suivantes qui s'annule en $a$.

(a) $x \mapsto e^{-x}\sin(2x)$ avec $a = 1$  (b) $x \mapsto (x+1)\sqrt{1-x}$ avec $a = 0$  (c) $x \mapsto x^2 \ln(x)$ avec $a = 1$