Fiche de calcul - Exponentielle et logarithme

Règles de calcul :

Exponentielle	Logarithme népérien
Pour a et b des réels	Pour a et b des réels strictement positifs
• Exponentielle d'une somme $\boxed{e^{a+b} = e^a e^b \text{ et } e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}}$	• Logarithme du produit $\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \text{ et } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)}$
• Puissance d'exponentielle $\boxed{(e^a)^b = e^{ab}}$	• Logarithme d'une puissance $c \in \mathbb{R}$. $\boxed{\ln(a^c) = c\ln(a)}$
• Exponentielle 0 $\boxed{(e^0 = 1}$	• Logarithme de 1 $\boxed{\ln(1) = 0}$
• Réciproque de l'exponentielle $\boxed{\ln(e^a) = a}$	• Réciproque de ln $\boxed{e^{\ln(a)} = a}$
• La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$	• La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$

Remarques :

— L'exponentielle transforme une somme en produit. Les règles de calcul avec l'exponentielle sont les mêmes que celles pour les puissances.

— Le logarithme transforme les produits en somme.

— Les fonctions exponentielle et logarithme sont réciproques : leur comportement vis à vis des opérations l'est donc lui aussi.

Exemples :

— $e^{2+x} = e^2 e^x$, $e^{-3} = \frac{1}{e^3}$, $\ln\left(e^{5+x}\right) = 5 + x$

— $\ln(6x) = \ln(6) + \ln(x)$, $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$, $e^{\ln(8x+2)} = 8x + 2$.

Voici des exercices de calculs. Il faut en faire très régulièrement (5 à 10 minutes par jour) afin de progresser. Si vous êtes à l'aise n'hésitez pas à faire le plus de calcul possible de tête

Exercice 1:

Simplifier, quand cela est possible, les expressions suivantes :

(a) $\ln(9) - \ln(8) + \ln(6) - \ln(15) + \ln(5)$.

(b) $\ln\left(\dfrac{2x+1}{x+3}\right) - \ln\left(\dfrac{4x+2}{x^2-9}\right)$

(c) $\dfrac{e^{3x+2}e^{-2x}}{e^{9x+6}e^{-16x}}$

(d) $\dfrac{e^{-\ln(x)}+x}{e^{2\ln(x)+1}}$

(e) $\ln\left(3e^{7t}\right) - 21t$.

(f) $\dfrac{e^{\ln(x^2)\ln(x^3)} - e^{\ln(x^4)\ln(x^6)}}{e^{\ln(x)^2}\left(e^{2\ln(x)^2} + e^{11\ln(x)^2}\right)}$

(g) $\ln\left(e^{x^2-x} + e^{1-x} + \dfrac{1}{e^{x-2}}\right) + x - \ln\left(e^{x^2-1} + 1 + e\right)$

Exercice 2:

Quelles sont les expressions égales ? Le prouver

(a) $\dfrac{1}{e^{-x}+1}$

(b) $e^{-x+\ln(1)}$

(c) $1+e^x$

(d) $\dfrac{e^x-1}{1+e^{-x}}$

(e) $\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

(f) $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

(g) $\dfrac{e^x}{e^x+1}$

(h) $\dfrac{e^{2x}-e^x}{e^x+1}$

(i) $\dfrac{1}{e^x}$

Exercice 3:

Déterminer une autre expression de $\ln(1+e^t) - t$ sous forme du logarithme d'une expression. L'égalité doit être valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 4:

Résoudre :

(a) $\dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{1}{2}$

(b) $e^{2x} - e^x - 2 = 0$

(c) $e^x + 3e^{-x} = 4$

(d) $\ln(x-4) + \ln(x-3) = \ln(5x+4)$.

(e) $\ln(1+x) = -1$

(f) $\ln\left(\dfrac{1+e^{2x}}{1+e^{-2x}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(e^{4x}+e^{-2x})$

Exercice 5:

Résoudre :

(a) $\ln(x) > 0$

(b) $e^{x^2-1} \leq e^x$

(c) $\dfrac{\ln(x)}{1+\ln(x)} < -3$

(d) $e^{2x} + 3e^x - 4 \leq 0$.

(e) $\ln(x) + \ln(x-1) \leq \ln(1+x)$

(f) $\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right) > 0$