

Fiche de calcul- Dérivation

Dérivées usuelles :

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Dérivée
$f(x) = C^{te}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n \ (n \in \mathbb{Z}^*)$	\mathbb{R} si $n > 0$ et \mathbb{R}^* si $n < 0$	\mathbb{R} si $n > 0$ et \mathbb{R}^* si $n < 0$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}_+^*	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	\mathbb{R}_+	\mathbb{R}_+^*	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}_+^*	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \cos(x)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \sin(x)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ $= \frac{1}{\cos(x)^2}$

Règles de calculs :

Forme de la fonction	Formule de dérivation	Condition
$u + v$	$u' + v'$	aucune
$\lambda \times u$	$\lambda \times u'$	aucune
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$	aucune
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	u ne s'annule pas sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I
$u \circ v$	$v' \times (u' \circ v)$	$v(I) \subset I$

Conséquences de la formule de dérivée d'une composée :

- Dérivée de $u^n \ (n \in \mathbb{N}^*) : nu' \times u^{n-1}$
- Dérivée de $\sqrt{u} : \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ pour tout $x \in I, u(x) > 0$
- Dérivée de $u^n \ (n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) : nu' \times u^{n-1}$ si u ne s'annule pas sur I .
- Dérivée de $\ln u : \frac{u'}{u}$ pour tout $x \in I, u(x) > 0$
- Dérivée de $e^u : u' \times e^u$

Conseil pour dériver

- Repérer les fonctions usuelles et Décomposer l'expression à l'aide des opérations : somme, produit, quotient et composition afin d'appliquer les bonnes formules.
- Pour dériver h , une composée : décomposer la fonction h en $u \circ v$, écrire $u'(v(x))$ et multiplier ensuite par $v'(x)$.

Exemple : $h : x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{2x^2+3}\right)$

On remarque la fonction \ln qui prend comme argument un quotient. Posons $u : x \mapsto \ln(x)$ et $v : x \mapsto \frac{x+1}{2x^2+3}$. Alors $h = u \circ v$.

En effet pour x dans l'ensemble de définition de h , $h(x) = u(v(x)) = \ln(v(x)) = \ln\left(\frac{x+1}{2x^2+3}\right)$.

On utilise la formule de composition pour dériver. Notons que $u'(x) = \frac{1}{x}$. On réfléchit/calculé ainsi :

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \overbrace{\frac{1}{\frac{x+1}{2x^2+3}}}^{u'(v(x))=g'\left(\frac{x+1}{2x^2+3}\right)} \times \left(\text{la dérivée de } x \mapsto \frac{x+1}{2x^2+3} \right) \\
 &= \frac{2x^2+3}{x+1} \times \frac{2x^2+3 - 4x(x+1)}{(2x^2+3)^2} \\
 &= \frac{-2x^2+4}{(x+1)(2x^2+3)}
 \end{aligned}$$

Voici des exercices de calculs. Il faut en faire très régulièrement (5 à 10 minutes par jour) afin de progresser.

Si vous êtes à l'aise n'hésitez pas à faire le plus de calcul possible de tête.

Exercice 1:

Déterminer (rapidement) l'ensemble de dérivabilité et dériver les fonctions suivantes. Déterminer les variations pour b), c), e), g), i) et k).

- | | | |
|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| (a) $f : x \mapsto 4x^9 + 3x^6 + 8x^3 - 7x^5 + 48$ | (f) $f : x \mapsto \frac{8x + 5}{5x + 9}$ | (j) $f : x \mapsto \frac{2x + 1}{4\sqrt{x}}$ |
| (b) $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^6}$ | (g) $f : x \mapsto -\frac{5(x^2 + 5)}{x - 4}$ | (k) $f : x \mapsto \frac{3 - \frac{2}{x}}{2x + 2}$ |
| (c) $f : x \mapsto -\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x}$ | (h) $f : x \mapsto \frac{(x - 2)x}{(x^2 - 4)}$ | (l) $f : x \mapsto -\frac{(x + 8)\sqrt{x}}{2x + 5}$ |
| (d) $f : x \mapsto (x^5 + x^3 + 1)(x^4 - 2x^2 + 3)$ | (i) $f : x \mapsto -\frac{x\sqrt{x}}{3(x + 1)}$ | (m) $f : x \mapsto -\frac{x^2 - \sqrt{x} + 3}{2x^2 + 1}$ |
| (e) $f : x \mapsto -\frac{2x + 5}{3x + 5}$ | | |

Exercice 2:

On considère une fonction u inconnue dérivable et $v : x \mapsto 3x^2 + 2x - 1$. On sait que la dérivée de uv est $x \mapsto 24x^3 - 33x^2 - 12x + 9$ et que celle de $\frac{u}{v}$ est $x \mapsto \frac{19x^2 - 16x + 1}{(3x^2 + 2x - 1)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$. Déterminer u .

Exercice 3:

On note u une fonction (dont on ne connaît pas l'expression) dérivable sur un intervalle adapté. Ecrire les fonction h suivante sous la forme $f \circ u$ si cela est possible et calculer la dérivée de h (on n'étudiera pas le domaine de dérivabilité)

- | | | | |
|--------------------|----------------------------|-----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| (a) $h = \sqrt{u}$ | (c) $h = \frac{1}{\ln(u)}$ | (e) $h = \sqrt{1 + u^2}$ | (h) $h = 6u^{n-3}$ pour $n \in \mathbb{N}$,
$n \geq 4$. |
| (b) $h = 3u^{n+2}$ | (d) $h = \frac{5}{u^7}$ | (f) $h : x \mapsto e^{\sqrt{u(x)+x+1}}$ | |
| | | (g) $h = \frac{5}{u^{n+3}}$ pour $n \in \mathbb{N}$ | |

Exercice 4:

Dériver (on n'étudiera pas le domaine de dérivabilité)

- | | | |
|---------------------------------------------|-------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| (a) $h : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x + 1}$ | (d) $h : x \mapsto \frac{2x + 1}{e^{5x+7} + 2}$ | (f) $h : x \mapsto \ln(\sqrt{x+2} + (x^4 + 7x + e^x)^4)$ |
| (b) $h : x \mapsto \ln(\sqrt{x+1} + 2x)$ | (e) $h : x \mapsto \frac{5}{(2x^3 + 3x)^4}$ | (g) $h : x \mapsto \sqrt{\ln(2x^2 + 3) + e^{\sqrt{x^2+1}}}$. |
| (c) $h : x \mapsto -6(\sqrt{x+2} + 3x^2)^8$ | | |

Exercice 5:

Déterminer l'ensemble de dérivabilité et dériver

- | | | |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| (a) $f : x \mapsto \sqrt{\frac{2+x}{1+x^2}}$ | (c) $f : x \mapsto \ln(x^2 - 5)$ | (f) $f : x \mapsto \sqrt{3x+2} + \frac{2x+5}{\ln(4x+3)}$ |
| (b) $f : x \mapsto \left \frac{x+5}{x-2} \right $ | (d) $f : x \mapsto x \ln((x+2)^2)$ | (g) $f : x \mapsto \sqrt{2x^2+5} e^{6x+2}$ |
| | (e) $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x+5)}$ | |

Exercice 6:

En utilisant une fonction :

- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, 2 \ln(x) < x$
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - e^{-x} \leq x$.
- Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi} x \leq \sin(x) \leq x$ (on pourra dériver deux fois)
- Déterminer les entiers n tels que $2^n \geq n^2$